# DEVOIR NUMÉRO 2 VERSION A

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

## Exercice 1

On désigne par $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**1.** **a.** Calculer $(A-I)(A+I)^2$.

**b.** En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

**2.** On note $E_1(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = U\}$.

**a.** Résoudre le système suivant : $(S_1) \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ -4x - 4y + 4z = 0 \\ -2x = 0 \end{cases}$.

**b.** Déterminer $E_1(A)$.

**c.** En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

**3.** On note $E_{-1}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = -U\}$.

**a.** Résoudre le système : $(S_{-1}) \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases}$

**b.** Déterminer $E_{-1}(A)$.

**c.** En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

**4.** On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**a.** Démontrer que $P$ est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On détaillera précisément les étapes de calcul.

**b.** Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où $T$ est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**c.** Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

**5.** **a.** Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T$ s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**b.** Calculer $N^2$ et en déduire $N^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**c.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer $T^n$ en fonction des matrices $D$ et $N$, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

---

*Date*: 4 Octobre 2024  14h00-18h00.
http://louismerlin.fr.

## Exercice 2 *d'après **EDHEC** 2023 Exercice 2.*

**1.** Donner un exemple d'une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel $K \in ]0,1[$ tel que, pour tout couple $(x,y)$ de réels, on ait
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x-y| \quad (\star).$$

*On considère pour toute la suite une fonction $f$ vérifiant la condition précédente. On dit que $f$ est $K$-contractante.*

**2.** Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**3.** À l'aide de la relation $(\star)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

**4.** On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel $u_0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

**a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a
$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n\,|u_1 - u_0|\,.$$

**b.** Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note $a$ sa limite.

**c.** Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

**5.** On désigne par $n$ et $p$ des entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).

**a.** Justifier que l'on a
$$\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i\,|u_1 - u_0|\,.$$

**b.** En déduire l'inégalité
$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant K^n \frac{1-K^p}{1-K}\,|u_1 - u_0|\,.$$

**c.** Établir enfin l'inégalité suivante
$$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1-K}\,|u_1 - u_0|\,.$$

**6.** **Étude d'un exemple** On considère la fonction $f$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par
$$f(t) = \frac{1}{1+e^t}.$$

**a.** Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout réel $t$.

**b.** Donner les variations de $f'$ sur $\mathbb{R}$ et établir enfin que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\left|f'(t)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

**c.** En déduire que $f$ est $\frac{1}{4}$-contractante.

**d.** On se propose d'utiliser l'inégalité de la question 5c pour fabriquer à l'aide de Python une valeur approchée de $a$. Dans cette question on suppose que $u_0 = 0$.

(i) Compléter le programme suivant pour qu'il calcule le $n$-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $n$ est un paramètre fixé par l'utilisateur).

```python
import math

def f(t) :
  return 1/(math.exp(t)+1)

def suite(n):
  u = .........
  for i in range(n) :
    u = .........
  return u
```

(ii) On ajoute au programme précédent le code qui suit. Compléter ce code pour qu'il retourne une valeur approchée de $a$ à epsilon près (où epsilon est un paramètre à choisir par l'utilisateur).

```python
def valeurapproche(n):
  u0 = suite(0)
  u1 = suite(1)
  n = 0
  while .........
    n = n+1
  return ........
```

## Exercice 3

**Partie I : étude préliminaire.**

On **admet** que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note $s_k(x)$ sa somme

$$s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

**1.** Vérifier que pour tout réel $x \in [0,1[$ :

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

**2.** Quelle formule affirme que pour tout couple d'entiers $(n,k)$ tels que $n > k$, on a

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

**Bonus :** Démontrer cette formule.

**3.** Pour tout entier naturel $k$ et pour tout réel $x$ de $[0,1[$, déduire de la question précédente que

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

**4.** Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$,

$$s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

**Partie II : étude d'une expérience aléatoire.**

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable $N$ égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si $N$ prend une valeur entière positive ou nulle notée $n$, on réalise une seconde série de $n$ tirages dans l'urne, toujours avec remise.
- On définit la variable aléatoire $X$ égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

**5.** Déterminer la loi de la variable aléatoire $N$. Donner son espérance.

**6.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\mathbb{P}_{[N=n]}(X=0) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

**7.** En déduire, en utilisant un système complet d'événements associé à la variable $N$, vérifier que $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{4}{9}$.

**8.** Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[N=n]}(X=k)$.
*On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$.*

**9.** En déduire en utilisant également l'étude préliminaire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

**10.** Montrer que $X$ admet un espérance $E(X)$ et la calculer.